FISICA CUANTICA II
EXAMEN DE JULIO, CUESTIONES

CURSO 2023/2024 1 de Julio de 2024

Los números entre corchetes indican el valor de cada apartado.
Esta prueba cuenta un 25% de la nota final.

1[3].- En un sistema de dos particulas de espin 1/2 sean los operadores

$$X_1 = \sigma_x \otimes 1 \ , \qquad Z_2 = 1 \otimes \sigma_z \ ,$$

y sea $|\psi\rangle$ el estado:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \Big(|+\rangle \otimes |-\rangle + (1+i)\, |-\rangle \otimes |-\rangle \Big) \ ,$$

donde $\sigma_z|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle$. Calculese el valor esperado del operador $X_1 Z_2$ en el estado $|\psi\rangle$.

2[2].- Sea a y $a^\dagger$ los operadores escalera de un oscilador armonico unidimensional. Considerese el operador:

$$A = a^2 + (a^\dagger)^2 \ .$$

Si $|n\rangle$ representa el n-esimo autoestado del hamiltoniano, calculese la traza:

$$\mathrm{Tr}\Big(|0\rangle\langle 2| \cdot A \Big) \ .$$

3[3].- Sea $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$ el operador de espin de una particula de espin 3/2. Obtenganse los posibles valores que pueden obtenerse al medir el operador:

$$O = S_x + 2S_y + 3S_z \ .$$

4[2].- Un oscilador armonico unidimensional se encuentra en el instante $t = 0$ en su primer estado excitado. A partir del instante inicial es perturbado por medio del hamiltoniano de interaccion:

$$H_I = \lambda \Big(a^2 a^\dagger + (a^\dagger)^2 a \Big) \ ,$$

siendo λ una constante real y a, $a^\dagger$ los operadores escalera del oscilador. A primer orden en la constante de acoplo λ, ¿que transiciones puede sufrir como consecuencia de la interaccion?.

En un sistema de dos partículas de espín $\frac{1}{2}$ sean los operadores

$$X_1 = \sigma_x \otimes 1 \qquad Z_2 = 1 \otimes \sigma_z$$

y sea $|\psi\rangle$ el estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|+\rangle \otimes |-\rangle + (1+i)\, |-\rangle \otimes |-\rangle\right)$$

con $\sigma_z |\pm\rangle = \pm |\pm\rangle$. Calcúlese el valor esperado del operador $X_1 Z_2$ en el estado $|\psi\rangle$

$$Z_2 |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[-|+\rangle \otimes |-\rangle - (1+i)\, |-\rangle \otimes |-\rangle\right]$$

$$X_1 Z_2 |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[-|-\rangle \otimes |-\rangle - (1+i)\, |+\rangle \otimes |-\rangle\right]$$

$$\langle\psi| = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\langle +| \otimes \langle -| + (1-i)\, \langle -| \otimes \langle -|\right)$$

$$\langle X_1 Z_2 \rangle_\psi = \langle \psi | X_1 Z_2 | \psi \rangle =$$

$$= \frac{1}{3}\left[-(1+\cancel{i}) - (1-\cancel{i})\right] = \frac{-2}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\langle X_1 Z_2 \rangle_\psi = -\frac{2}{3}}$$

Sean a y a^+ los operadores escalera de un oscilador armónico unidimensional. Considérese el operador

$$A = a^2 + (a^+)^2$$

Si $|n\rangle$ representa el n-ésimo autoestado de la energía del oscilador, calcúlese la traza

$$T_r\left[|0\rangle\langle 2|\cdot A\right]$$

$$T_r\left[|0\rangle\langle 2|\, A\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\langle n|0\rangle}_{\delta_{n,0}}\langle 2|A|n\rangle =$$

$$= \langle 2|A|0\rangle = \langle 2|\left(\cancel{a^2}+(a^+)^2\right)|0\rangle =$$

$$= \langle 2|(a^+)^2|0\rangle$$

Como $a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\;|n+1\rangle \Longrightarrow$

$$a^+|0\rangle = |1\rangle\,, \quad (a^+)^2|0\rangle = a^+|1\rangle = \sqrt{2}\,|2\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle 2|(a^+)^2|0\rangle = \sqrt{2}\,\underbrace{\langle 2|2\rangle}_{1} = \sqrt{2} \Longrightarrow$$

$$\boxed{T_r\left[|0\rangle\langle 2|\cdot A\right] = \sqrt{2}}$$

Sea $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$ el operador de espín de una partícula de espín s. Obténganse los posibles valores que pueden obtenerse al medir

$$\alpha S_x + \beta S_y + \gamma S_z$$

siendo α, β y γ constantes reales

Definamos el siguiente vector unitario

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} (\alpha, \beta, \gamma) \qquad \vec{n}\cdot\vec{n} = 1$$

Entonces

$$\alpha S_x + \beta S_y + \gamma S_z = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\ \vec{S}\cdot\vec{n}$$

Los resultados de la medida de $\vec{S}\cdot\vec{n}$ son los mismos que obtendríamos al medir S_z, pues $\vec{S}\cdot\vec{n}$ es la componente de $\vec{S}$ a lo largo de la dirección $\vec{n}$ y la dirección de cuantización es arbitraria. Es decir, al medir $\vec{S}\cdot\vec{n}$ podemos obtener los $2s+1$ valores

$$\text{valores de } \vec{S}\cdot\vec{n} = m\hbar \ , \qquad m = -s, \dots, +s$$

Entonces:

$$\boxed{\text{valores de } \alpha S_x + \beta S_y + \gamma S_z = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\ m\hbar}$$

$$\boxed{m = -s, \dots, +s}$$

Caso particular del problema

$s = 3/2 \quad , \quad \alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 3$

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 + 4 + 9 = 14$

Valores de $S_x + 2 S_y + 3 S_z = \sqrt{14}\, m \hbar$

$m = -3/2, -1/2, +1/2, +3/2$

Como $\frac{\sqrt{14}}{2} = \sqrt{7/2} \Rightarrow$

Solucion

$-3\sqrt{7/2}\,\hbar, \; -\sqrt{7/2}\,\hbar, \; \sqrt{7/2}\,\hbar, \; 3\sqrt{7/2}\,\hbar$

Un oscilador armonico unidimensional se encuentre en $t=0$ en su primer estado excitato. A partir del instante inicial es perturbado por medio del hamiltoniano de interaccion

$$H_I = \lambda\left(a^2 a^+ + (a^+)^2 a\right)$$

siendo λ una constante real y a, a^+ los operadores escalera del oscilador. A primer orden en la constante de acoplo λ, ¿que transiciones puede sufrir como consecuencia de la interaccion?

Estudiemos la accion de los operadores que aparecen en H_I

$a^2 a^+ |n\rangle \sim |n-1\rangle \Rightarrow$ induce una transicion $|n\rangle \to |n-1\rangle$

$(a^+)^2 a |n\rangle \sim |n+1\rangle \Rightarrow$ induce una transicion $|n\rangle \to |n+1\rangle$

Si inicialmente $n=1 \Rightarrow |\psi(0)\rangle = |1\rangle$, podemos tener

$\boxed{|1\rangle \longrightarrow |0\rangle \quad \text{transicion al estado fundamental}}$

$\boxed{|1\rangle \to |2\rangle} \to$ excitacion al 2° estado excitado